□06□ □□□□□:□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□□□17□□□

1□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=lnx-ax$□□□ $a\in R$□

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□

(i) □ a□□□□□□

(ii) □ $f(x)$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $x_1x_2>e^2$ □

□□□□□□□1□□□□□□□□$(0,+\infty)$□

$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$ □

①□ $a\leqslant 0$□□ $f'(x)\geqslant 0$□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

②□ $a>0$□□□ $f'(x)=0$□ $x=\frac{1}{a}$□

□□ $0<x<\frac{1}{a}$□□ $f'(x)<0$□ $f(x)$ □ $(0,\frac{1}{a})$ □□□□□

□ $\frac{1}{a}<x$ □□ $f'(x)>0$□ $f(x)$ □ $(\frac{1}{a},+\infty)$ □□□□□

□2□(i)□1□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $lnx-ax=0$□$(0,+\infty)$□□□□□□□

□□□□□ $y=lnx$□□□ $y=ax$□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□ $y=lnx$□□□□□□□□ k□

□□ $0<a<k$□

□□□ $A(x_0$□$lnx_0)$□□□ $k=y'|_{x=x_0}=x_0=\frac{1}{x_0}$□

$k=\frac{\ln x_0}{x_0}$ $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$ $x_0=e$

$k=\frac{1}{e}$ $0<a<\frac{1}{e}$

2 1 $a\le 0$ $f(x)$ $(0,+\infty)$

$\therefore a>0$

$f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1$

$\ln\frac{1}{a}-1>0$ $0<a<\frac{1}{e}$

$\frac{1}{a}>e$ $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}$

$f(\frac{1}{e})=-1-\frac{e}{a}<0$ $f(x)$ $(0,\frac{1}{a})$ $f(\frac{1}{a^2})=\ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=2\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$

$g(x)=2\ln x-x$ $x>e$ $g'(x)=\frac{2}{x}-1<0$

$g(x)$ $(e,+\infty)$ $\therefore f(\frac{1}{a^2})=g(\frac{1}{a})<g(e)=2-e<0.\therefore f(x)$ $(\frac{1}{a},+\infty)$ a $(0,\frac{1}{e})$

(ii) $x_1x_2>e^2\Leftrightarrow \ln x_1+\ln x_2>2$

$x_1>x_2>0$

$f(x_1)=0$ $f(x_2)=0$

$\therefore \ln x_1-ax_1=0$ $\ln x_2-ax_2=0$

$\therefore \ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$ $\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$

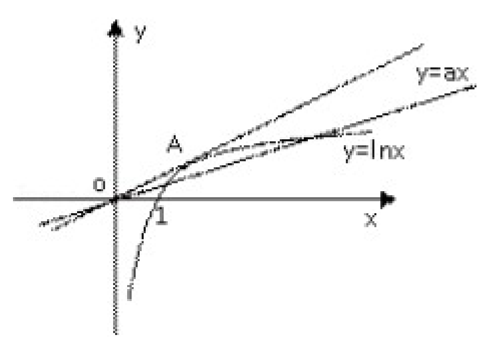
$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2\Leftrightarrow a(x_1+x_2)>2\Leftrightarrow \frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$

$\frac{x_1}{x_2}=t$ $t>1$ $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}>\frac{2(t-1)}{t+1}$ $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ $(t>1)$

□□□□ $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ □

□□□ $g(t)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore g(t)>g$ □1□ $=0$ □□□□□ $lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$ □□□□□□□□□ $x_1x_2>e^2$ □□□



2□□2021•□□□□□□□□□□ $f(x)=lnx+\frac{b}{x}-a(a\in R,b\in R)$ □□□□ M □□ $M\geq 0$ □

□I□□ $e^{a-1}-b+1$ □□□□□

□II□□ $e^{a-1}-b+1$ □□□□□□□□ F □b□ $=\frac{a-1}{b}-m(m\in R)$ □ $F(x)$ □□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $x_1\cdot x_2^2>e^3$ □

□□□□□□I□□□□ $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{b}{x^2}=\frac{x-b}{x^2}(x>0)$ □

□ $b\leq 0$ □□ $f'(x)\geq 0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□

□ $b>0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x=b$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,b)$ □□□□□ $(b,+\infty)$ □□□□

$\therefore M=f$ □b□ $=lnb+1-a\geq 0$ □□ $lnb\geq a-1$ □□□ $b\geq e^{a-1}$ □ $e^{a-1}-b\leq 0$ □

□□ $e^{a-1}-b+1$ □□□□□ 1□

□II□□□□□ $e^{a-1}-b+1$ □□□□□□□ $a-1=lnb$ □ $F(b)=\frac{a-1}{b}-m=\frac{lnb}{b}-m$ □

□ $F(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $\frac{\ln x_1}{x_1} - m=0; \frac{\ln x_2}{x_2} - m=0$ □□ $\ln x_1 = m x_1$ □ $\ln x_2 = m x_2$ □

□□□ $x_1 \cdot x_2^2 > e^3$ □□□□□□ $\ln x_1 + 2\ln x_2 = m x_1 + 2m x_2 = m(x_1 + 2x_2) > 3$ □

□□□□□ $\ln\frac{x_1}{x_2} = m(x_1 - x_2) \Rightarrow m = \frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}$ □

□□□□□ $(x_1 + 2x_2) \cdot \frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} > 3 \Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_2} < \frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 + 2x_2} = \frac{3(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 2}$ □

□ $\frac{x_1}{x_2} = t(0 < t < 1)$ □□ $g(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{t+2}, (0 < t < 1)$ □ $g'(t) = \frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2} > 0$ □

□□□□ $g(t)$ □ $(0,1)$ □□□□□□ $\therefore g(t) < g$ □1□ $=0$ □□□□

3．（2021•□□□□□□□□□□ $f(x) = e^x - \frac{a\ln x}{x} - a(e$ □□□□□□□□□□□□□□□

□1□□□□ a □□□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $x_1 x_2 > \frac{e^2}{e^{x_1 + x_2}}$ □

□□□□□□□□1□□□□□□□ $h(x) = xe^x - a\ln x - ax = xe^x - a\ln(xe^x) = 0$ □ 2 □□□□

□ $t(x) = xe^x$ □□ $t'(x) = (x+1)e^x > 0$ □ $x > 0$ □□□□□

□ $t(x) = xe^x$ □ $(0, +\infty)$ □□□□□□

□□ $h(x)$ □ 2 □□□□□□□ $g(t) = t - a\ln t$ □ 2 □□□□

□□ $g'(t) = 1 - \frac{a}{t}$ □

$a \leqslant 0$ □□ $g'(t) > 0$ □ $g(t)$ □□□□□□□□□ 2 □□□□

□ $a > 0$ □□□ $g'(t) > 0$ □□ $t > 1$ □ $g(t)$ □□□□□ $g'(t) < 0$ □□ $0 < t < a$ □ $g(t)$ □□□□□ $g(t)_{min} = g$ □a□ $= a - a\ln a$ □

若 $0<a<e$，则 φ（a）>0，此时 $g(t)>0$ 恒成立，没有零点，

若 $a=e$，则 φ（a）$=0$，有一个零点，

若 $a>e$，则 φ（a）<0，

因为 g（1）$=1>0$，$g(e^{a})e^{a}-a^{2}>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,e)$，(e,e^{a}) 上各有 1 个零点，符合题意，

综上，a 的范围 $(e,+\infty)$；

（2）证明：要证 $x_1x_2>\frac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$，只要证 $x_1x_2e^{x_1+x_2}>e^2$，

即证 $ln(x_1e^{x_1})+ln(x_2e^{x_2})>2$，

由（1）可知，$t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，

所以 $a(lnt_2-lnt_1)=t_2-t_1$，$a(lnt_2+lnt_1)=t_2+t_1$，

所以 $lnt_1+lnt_2=\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(lnt_2-lnt_1)=\frac{(\frac{t_2}{t_1}+1)ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1}$，

只要证 $\frac{(\frac{t_2}{t_1}+1)ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1}>2$，

设 $0<t_1<t_2$，令 $t=\frac{t_2}{t_1}$，$t>1$，

所以只要证 $lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$ 即证 $lnt+\frac{4}{t+1}-2>0$，

令 $h(t)=lnt+\frac{4}{t+1}-2$，$t>1$，

则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore h(t) > h(1) = 0$,

即当 $t > 1$ 时, $) = \ln t + \frac{4}{t+1} - 2 > 0$,

所以 $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$ 即 $(x_1 e^{x_1})(x_2 e^{x_2}) > e^2$,

故 $x_1 x_2 > \frac{e^2}{e^{x_1 + x_2}}$.

4.（2021•武进区校级月考）已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求 a 的值;

(2) 若存在 $t \in [-1, 1]$，使不等式 $f(x) \leqslant tx - (a-1)\ln x$ 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立，求 a 的取值范围;

(3) 若方程 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 有两个不等的实数根 x_1、x_2，试证明 $x_1 x_2 > e^2$.

【解答】(1) 解: $f'(x) = \frac{1}{x} + x - a$，$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行,

$\therefore f'(1) = 2 - a = 0$，解得 $a = 2$.

(2) 解: $x \in [1, e]$，不等式 $f(x) \leqslant tx - (a-1)\ln x$ 化为: $\frac{1}{2}x - a(1 - \frac{\ln x}{x}) \leqslant t$,

$\because$ 存在 $t \in [-1, 1]$，使不等式 $f(x) \leqslant tx - (a-1)\ln x$ 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立,

$\therefore \frac{1}{2}x - a(1 - \frac{\ln x}{x}) \leqslant 1$，化为: $a \geqslant \frac{\frac{1}{2}x^2 - x}{x - \ln x} = g(x)$.

$g'(x) = \frac{(x-1)(\frac{1}{2}x + 1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$,

令 $h(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \ln x$，$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{2x} > 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 上单调递增,

$h(x)..h$□1□$=\frac{1}{2}+1-0>0$□

$\therefore g'(x)..0$□□□□□$g(x)$□$x\in[1$□$e]$□□□□□□

$\therefore a..g$□e□$=\frac{e^2-2e}{2e-2}$□

$\therefore a$□□□□□□$[\frac{e^2-2e}{2e-2},+\infty)$□

□3□□□□□□$f(x)=\frac{1}{2}x^2$□□$ax-lnx=0$□$x>0$□

□$h(x)=ax-lnx$□$h'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{a(x-\frac{1}{a})}{x}$□

□□□□□$h(x)$□$x>\frac{1}{a}$□□□□□□□$0<x<\frac{1}{a}$□□□□□□

$\therefore x=\frac{1}{a}$□□□□$h(x)$□□□□□□□□□□

$h(\frac{1}{a})=1+lna$□

□□$f(x)=\frac{1}{2}x^2$□□□□□□□□□x_1□x_2□

$\therefore lnx_1+lnx_2=a(x_1+x_2)=ln(x_1x_2)$□□□□□$x_1x_2>e^2$□□□□□□$a(x_1+x_2)>2$□□□

□□□$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$□□$\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$□□□□□$h(x)$□$x>\frac{1}{a}$□□□□□□

□□□□□□□$ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)>0$□□□□$x_2>\frac{2}{a}-x_1$□

□□□$g(x)=ln(\frac{2}{a}-x)-a(\frac{2}{a}-x)-(lnx-ax)$□

$g'(x)=\frac{1}{x-\frac{2}{a}}+2a-\frac{1}{x}=\frac{2(ax-1)^2}{x(ax-2)}$□

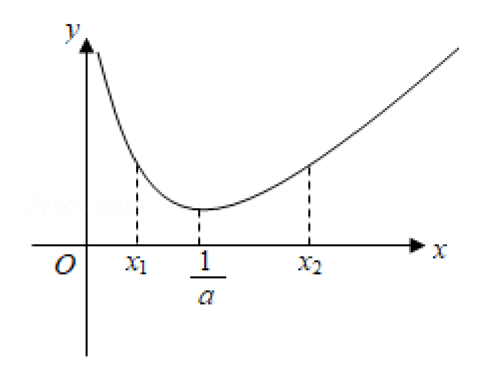
□□□$(0,\frac{2}{a})$□$g'(x)<0$□□$g(\frac{1}{a})=0$□

∴ $0<x_1<\frac{1}{a}$ □ $g(x_1)>0$ □□ $\ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)-(\ln x_1-ax_1)>0$ □

□ $\ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)>0$ □

∴ $x_2>\frac{2}{a}-x_1$ □

∴ $x_1x_2>e^2$ □



5□□2021•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-x\ln x$ □□□□□ $f'(x)$ □

□I□□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□□□ x □□□ $f(x)=m$ □□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $x_1x_2^2<2$ □

□□□□□□I□ $f'(x)=x+1-(1+\ln x)=x-\ln x(x>0)$ □

□ $g(x)=x-\ln x$ □□ $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}(x>0)$ □

□□ $g(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

∴ $f'(x)=g(x)\geqslant g$□1□$=1>0$□

∴ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□ … □4 □□

□II□□□□□ $\begin{cases}x_1-\ln x_1=m\\x_2-\ln x_2=m\end{cases}$ □□□□ $x_1-x_2=\ln\frac{x_2}{x_1}$ □

$\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$ $x_1=\frac{lnt}{t-1}$ $x_2=\frac{tlnt}{t-1}$

$x_1x_2^2<2$

$\frac{lnt}{t-1}\cdot\frac{t^2(lnt)^2}{(t-1)^2}<2$

$(lnt)^3<\frac{2(t-1)^3}{t^2}$

$lnt<\frac{2^{\frac{1}{3}}(t-1)}{t^{\frac{2}{3}}}$

$t^{\frac{1}{3}}=x(x>1)$ $2^{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{x^2})-3lnx>0$

$F(x)=2^{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{x^2})-3lnx(x>1)$

$x>1$ $F(x)>0$ $F'(x)=2^{\frac{1}{3}}(1+\frac{2}{x^3})-\frac{3}{x}=\frac{2^{\frac{1}{3}}(x^3+2)-3x^2}{x^3}$

$h(x)=2^{\frac{1}{3}}(x^3+2)-3x^2(x>1)$

$h'(x)=2^{\frac{1}{3}}(3x^2)-6x=3x(2^{\frac{1}{3}}x-2)(x>1)$

$h(x)$ $(1,2^{\frac{2}{3}})$ $(2^{\frac{2}{3}},+\infty)$

$\therefore h(x)\geqslant h(2^{\frac{2}{3}})=0$

$\therefore F'(x)\geqslant 0$

$\therefore F(x)$ $(1,+\infty)$

$\therefore F(x)>F(1)=0$

6□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x-a\sin x+m\ln x$□$g(x)=f(x)+a\sin x$□

□1□□□□ $y=g(x)$ □□□□

□2□□□□ x_1 □ $x_2\in(0,+\infty)$ □□□ $x_1\neq x_2$ □□ $f(x_1)=f(x_2)$ □□ $0<a<1$ □□□□□ $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{m}{a-1}$□

□□□□□□1□□ $g(x)=x+m\ln x$□$\therefore$ $g'(x)=1+\dfrac{m}{x}=\dfrac{x+m}{x}(x>0)$□

□ $m\geq 0$ □ $g'(x)>0$□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□

□ $m<0$ □ $0<x<-m$ □ $g'(x)<0$□ $x>-m$ □ $g'(x)>0$□ $g(x)$ □ $(0,-m)$ □□□□□□□ $(-m,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore x=-m$ □ $g(x)$ □□□□ $-m+m\ln(-m)$ □□□□□□

□□□□□ $m\geq 0$ □ $g(x)$ □□□□

□ $m<0$ □ $g(x)$ □□□□ $-m+m\ln(-m)$ □□□□□□

□2□□□□ $h(x)=x-a\sin x$□$\therefore h'(x)=1-a\cos x$□ $-1\leq\cos x\leq 1$□$\therefore 0<a<1$□ $h'(x)=1-a\cos x\geq 0$□

□□□□ $0<a<1$ □ $h(x)=x-a\sin x$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $x\in(0,+\infty)$ □□□□ $h(x)>h(0)=0$□□ $x>a\sin x$□□□

□ $m\geq 0$ □ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $0<a<1$ □ $h(x)=x-a\sin x$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $y=f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□□ x_1 □ $x_2\in(0,+\infty)$ □

□□□ $x_1\neq x_2$ □□ $f(x_1)=f(x_2)$□

□□□ $m<0$□

□ $0<x_1<x_2$□ $f(x_1)=f(x_2)$□ □ $x_1-a\sin x_1+m\ln x_1=x_2-a\sin x_2+m\ln x_2$□

$\therefore -m(\ln x_2-\ln x_1)=(x_2-x_1)-a(\sin x_2-\sin x_1)$①□

□ $x_1-\sin x_1<x_2-\sin x_2$□$\therefore -a(\sin x_2-\sin x_1)>-a(x_2-x_1)$②□

□①②□□□□$-m(\ln x_2-\ln x_1)>(x_2-x_1)-a(x_2-x_1)$□

□$-m(\ln x_2-\ln x_1)>(1-a)(x_2-x_1)$□

□$\ln x_1<\ln x_2$□$\ln x_2-\ln x_1>0$□$\therefore -m>(1-a)\times\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>0$③□

□□$\sqrt{x_1x_2}<\frac{m}{a-1}$④□□□□③□□□

□□□□□$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$□□□$\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}>\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$□

□$t=\frac{x_2}{x_1}>1$□□□□$\frac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$□

□□□$\frac{t-1}{\sqrt{t}}-\ln t>0(t>1)$□□$h(t)=\frac{t-1}{\sqrt{t}}-\ln t(t>1)$□

□$h'(t)=\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}>0(t>1)$□$h(t)$□$(1,+\infty)$□□□□□□$\therefore h(t)>h$□1□$=0$□$\therefore \frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$□□□

□□□③□□$\sqrt{x_1x_2}<\frac{m}{a-1}$□□□

7□□2021•□□□□□□□□□□□$f(x)=e^x-ax+a(a\in R)$□

□1□□$a=1$□□□□□$f(x)$□□$(0$□$f(0))$□□□□□□□

□2□□□□$f(x)$□□□□x□□□$A(x_1$□$0)$□$B(x_2$□$0)$□□□□$x_1<x_2$□□a□□□□□□

(3) 证明: $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$ ($f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数).

【解答】解: (1) $f(x)=e^x-x+1$ 的导数为 $f'(x)=e^x-1$,

可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为 0, 切点为 $(0,2)$,

可得切线方程为 $y=2$;

(2) $f(x)$ 的导数为 $f'(x)=e^x-a$,

当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立, $f(x)$ 在 R 上递增, 与题意不符;

当 $a>0$ 时, 由 $f'(x)=0$, 可得 $x=\ln a$,

当 $x>\ln a$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增; 当 $x<\ln a$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减,

可得 $x=\ln a$ 处 $f(x)$ 取得极小值 $a(2-\ln a)$,

函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ 两点, 且 $x_1<x_2$,

可得 $a(2-\ln a)<0$, 即 $a>e^2$, 存在 $1<\ln a$, $f(1)=e>0$,

存在 $a>\ln a$, $f(3\ln a)=a^3-3a\ln a+a>a^3-3a^2+a>0$,

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$, $(\ln a,+\infty)$ 的单调性和 $f(x)$ 的图象在 R 上不间断,

可得 $a>e^2$ 为所求取值范围;

(3) 证明: $e^{x_1}-ax_1+a=0$, $e^{x_2}-ax_2+a=0$,

两式相减可得 $a=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$,

设 $s=\dfrac{x_2-x_1}{2}(s>0)$, 则 $f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}[2s-(e^s-e^{-s})]$,

□ $g(s)=2s-(e^{s}-e^{-s})$ □ $g'(s)=2-(e^{s}+e^{-s})<0$ □□□ $g(s)$ □ $(0,+\infty)$ □□□

□□ $g(s)<g(0)=0$ □□ $\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$ □□□ $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$ □

□ $f'(x)=e^{x}-a$ □□□□□□ $\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}$ □

□□ $f'(\sqrt{x_1x_2})<f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$ □

□□□□□□□□

8□□2021•□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^{x}-ax+a(a\in R)$ □□□□ x □□□ $A(x_1$ □ $0)$ □ $B(x_2$ □ $0)$ □□□□ $x_1<x_2$ □

□1□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□

□2□□□□ $f'(\sqrt{x_1x_2})<0(f'(x)$ □ $f(x)$ □□□□□□

□3□□□□ $x_1x_2<x_1+x_2$ □

□□□□□□1□□□□ $f(x)=e^{x}-ax+a(a\in R)$ □□□□ x □□□ $A(x_1$ □ $0)$ □ $B(x_2$ □ $0)$ □□□□□□□ $f(x)$ □□□□

□ $f'(x)=e^{x}-a=0$ □□□□□□□ $a>0$ □□□ $x=lna$ □□□ $x<lna$ □ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

$x>lna$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□□ lna □□□□□□

$f(lna)_{□□□}=e^{lna}-alna+a=2a(2-lna)$ □□□□□□ $f(lna)<0$ □□□ $a>e^{2}$ □

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ $(-\infty,lna)$ □□□□□□□ $(lna,+\infty)$ □

□□□□□ lna □□□□□□□□ $a>e^{2}$ □

□2□□□□ $\begin{cases} e^{x_1}-ax_1+a=0 \\ e^{x_2}-ax_2+a=0 \end{cases}$ □

□□□□□□□ $a=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$ □□ $s=e^{\frac{x_2-x_1}{2}}(s>0)$ □

□ $f(\frac{x_1+x_2}{2}) = e^{\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$ □

$= \frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}[2s-(e^{s}-e^{-s})]$ □

□ $g(s)=2s-(e^{s}-e^{-s})$ □

□ $g'(s)=2-(e^{s}+e^{-s})<0$ □

□□ $g(s)$ □□□□□ $g(s)<g(0)=0$ □

□ $\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$ □

$\therefore f(\frac{x_1+x_2}{2})<0$ □

□ $\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}$ □

$\therefore f'(\sqrt{x_1x_2})<0$ □

□3□□□□□ $\begin{cases} e^{x_1}-ax_1+a=0 \\ e^{x_2}-ax_2+a=0 \end{cases}$ □□□ $e^{x_2-x_1}=\frac{x_2-1}{x_1-1}$ □

$\therefore e^{(x_2-1)-(x_1-1)}=\frac{x_2-1}{x_1-1}$ □

□ $m=x_1-1$ □ $n=x_2-1$ □□ $0<m<1<n$ □

$\therefore e^{n-m}=\frac{n}{m}$ □

□ $t=\frac{n}{m}$ □□ $t>1$ □ $n=mt$ □

$\therefore e^{(t-1)m}=t$ □

$\therefore m=\frac{\ln t}{t-1}$ □ $n=\frac{t\ln t}{t-1}$ □

$\therefore mn=\frac{t(lnt)^2}{(t-1)^2}$□

□□□□ $x_1x_2<x_1+x_2$ □□□□□□□ $(x_1-1)(x_2-1)<1$ □□□ $mn<1$□

□□ $\frac{t(lnt)^2}{(t-1)^2}<1$ □

□□ $\frac{lnt}{t-1}<\frac{1}{\sqrt{t}}$□

□□ $lnt<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$□

□ $g(t)=2lnt-t+\frac{1}{t}$□ $(t>1)$□

$g'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$□

$\therefore g(t)$□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□ $\sqrt{t}>1$□

□ $g(\sqrt{t})<0$□

$\therefore 2lnt-t+\frac{1}{t}<0$□

$\therefore lnt<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$□

□□□□ $x_1x_2<x_1+x_2$□

9□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=alnx+x+a$□ $g(x)=xe^x$□

□1□□ $a=1$□□□□□ $F(x)=g(x)-f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□ a □□□□□□□□ $x_1x_2>1$ □

□□□□□□1□□ $a=1$ □□ $F(x)=xe^x-lnx-x-1(x>0)$ □□ $F'(x)=e^x+xe^x-\frac{1}{x}-1=(x+1)(e^x-\frac{1}{x})$ □

□ $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$ □□ $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$ □

$\therefore \varphi(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $\varphi(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0,\varphi(1)=e-1>0$ □□□□□□ $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ □□□ $\varphi(x_0)=0$ □□ $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$ □ $lnx_0=-x_0$ □

□□ $x\in(0,x_0)$ □□ $\varphi(x)<0$ □ $F'(x)<0$ □□ $x\in(x_0$ □ $+\infty)$ □□ $\varphi(x)>0$ □ $F'(x)>0$ □

$\therefore F(x)$ □ $(0,x_0)$ □□□□□□ $(x_0$ □ $+\infty)$ □□□□□

$\therefore F(x)_{min}=F(x_0)=x_0e^{x_0}-lnx_0-x_0-1=1+x_0-x_0-1=0$ □

□2□ $f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}(x>0)$ □

① □ $a..0$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□

② □ $a<0$ □□□ $x\in(0,-a)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□□ $x\in(-a,+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $f(x)_{min}=f(-a)=aln(-a)<0$ □□□ $a<-1$ □□□□□ $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}>0$ □

(i) □ $-2,, a<-1$ □□ $f(e^2)=e^2+4a>0$ □□□ $\frac{1}{e}<-a<e^2$ □□ $f(x)$ □ $(0,-a)$ □ $(-a,+\infty)$ □□□□□□□□□

(ii) □ $a<-2$ □□ $f(e^{-a})=alne^{-a}+e^{-a}+a=e^{-a}-a^2+a$ □

□ g □a□ $=e^{-a}-a^2+a$ □ $a<-2$ □□ g' □a□ $=-e^{-a}-2a+1$ □ g'' □a□ $=e^{-a}-2>0$ □

$\therefore g'$ □a□□ $(-\infty,-2)$ □□□□□□ g' □a□ $<g'(-2)=-e^2+5<0$ □

$\therefore g$ □a□□ $(-\infty,-2)$ □□□□□□ g □a□ $>g(-2)=e^2-6>0$ □□ $f(e^{-a})>0$ □

□□ $\frac{1}{e}<-a<e^{a}$ □□ $f(x)$ □ $(0,-a)$ □ $(-a,+\infty)$ □□□□□□□□□

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ a □□□□□□ $(-\infty,-1)$ □

□□□ $x_1x_2>1$ □

□□□ $0<x_1<-a<x_2$ □□ $f(x_1)=f(x_2)=0$ □□ $\begin{cases} alnx_1+x_1+a=0 \\ alnx_2+x_2+a=0 \end{cases}$ □

□□□□□□ $-a=\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2}$ □

□□□□□□ $lnx_1+lnx_2=\frac{x_1+x_2}{-a}-2=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}(lnx_1-lnx_2)-2$ □

□□ $x_1x_2>1$ □□□□ $lnx_1+lnx_2>0$ □□□ $\frac{lnx_1-lnx_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}=\frac{1}{2}ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1}<0$ □

□ $h(t)=\frac{1}{2}lnt-\frac{t-1}{t+1},t\in(0,1]$ □□ $h'(t)=\frac{1}{2t}-\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}\geqslant 0$ □

$\therefore h(t)$ □ $(0$ □ $1]$ □□□□□□ $h(t)\leqslant h$ □1□ $=0$ □

□ $\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$ □□□□□□□□□□□□□

10□□2021•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=xlnx-\frac{a}{2}x^2-x+a(a\in R)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□

□1□□ a □□□□□□

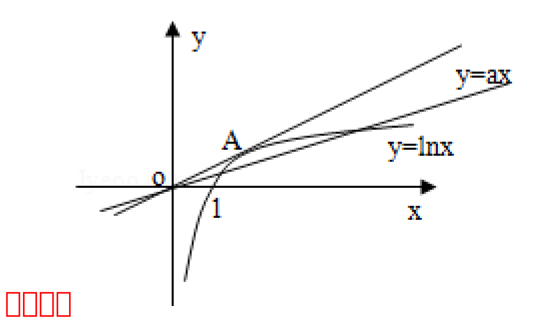
□2□□□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □□ $\lambda\geqslant 1$ □□□□□□□□ $x_1\cdot x_2^{\lambda}>e^{1+\lambda}$ □□□□

□□□□□□□1□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□□ $f'(x)=0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□

□□□ $\ln x - ax=0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□ $y=\ln x$ □□□ $y=ax$ □□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□



□□□□

□□□□□□□□□□□□□ $y=\ln x$ □□□□□□□□ k □□□ $0<a<k$ □

□□□ $A(x_0$ □ $\ln x_0)$ □

□ $k=y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ □□ $k=\frac{\ln x_0}{x_0}$ □

□ $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$ □

□□□ $x_0=e$ □

□ $k=\frac{1}{e}$ □

□ a □□□□□□ $(0,\frac{1}{e})$ □

□2□□□□□□ $x_1 \cdot x_2^{\lambda} > e^{1+\lambda}$ □□□□□□□□□□□ $1+\lambda<\ln x_1+\lambda\ln x_2$ □

□□1□□□ x_1 □ x_2 □□□□□ $\ln x - ax=0$ □□□□□

□ $\ln x_1=ax_1$ □ $\ln x_2=ax_2$

□□□□□□□ $1+\lambda<ax_1+\lambda ax_2=a(x_1+\lambda x_2)$ □□□ $\lambda>0$ □ $0<x_1<x_2$ □

所以原式等价于要证明 $a>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$.

又由 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$ 作差得，$\ln\dfrac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$，即 $a=\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$.

所以原式等价于 $\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$，令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，

则不等式 $\ln t<\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ 在 $t\in(0,1)$ 上恒成立.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$，

又 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\dfrac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$，

当 $\lambda\geqslant 1$ 时，可见 $t\in(0,1)$ 时，$h'(t)>0$，

所以 $h(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 上单调增，

又 $h(1)=0$，$h(t)<0$

所以 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{(1+\lambda)(x_1-x_2)}{x_1+\lambda x_2}$ 在 $t\in(0,1)$ 恒成立，所以原不等式成立.

11．(2021•浙江模拟) 已知函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}x^2-x+a(a\in R)$ 在其定义域内有两个不同的极值点.

(1) 求 a 的取值范围；

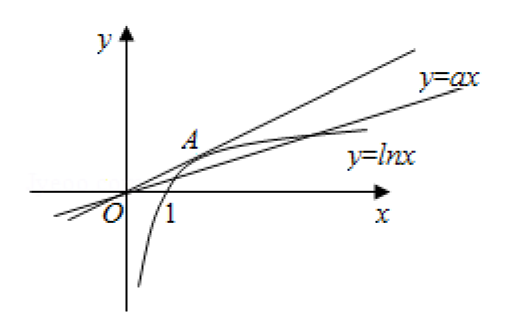
(2) 记两个极值点分别为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，已知 $\lambda>0$，若不等式 $e^{1+\lambda}<x_1x_2^{\lambda}$ 恒成立，求 λ 的取值范围.

【解答】解：(1) 由题意知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个不同根；

即方程 $\ln x-ax=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个不同根；

$y=lnx$ $y=ax$ $(0,+\infty)$



$y=lnx$ k $0<a<k$

$A(x_0, lnx_0)$

$k=y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ $k=\frac{lnx_0}{x_0}$

$\frac{1}{x_0}=\frac{lnx_0}{x_0}$ $x_0=e$

$k=\frac{1}{e}$

$0<a<\frac{1}{e}$

（2） $e^{1+\lambda}<x_1x_2^{\lambda}$ $1+\lambda<lnx_1+\lambda lnx_2$

1 x_1 x_2 $lnx-ax=0$

$lnx_1=ax_1$ $lnx_2=ax_2$

$\therefore$ $1+\lambda<ax_1+\lambda ax_2=a(x_1+\lambda x_2)$ $\lambda>0$ $0<x_1<x_2$

$\therefore$ $a>\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

□□ $lnx_1 = ax_1$ □ $lnx_2 = ax_2$ □□□□ $ln\frac{x_1}{x_2} = a(x_1 - x_2)$ □□ $a=\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$ □

$\therefore$ □□□□□ $\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2} > \frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$ □

□ $0<x_1<x_2$ □□□□□□□□ $ln\frac{x_1}{x_2} < \frac{(1+\lambda)(x_1-x_2)}{x_1+\lambda x_2}$ □□□□

□ $t=\frac{x_1}{x_2}$ □ $t\in(0,1)$ □

□□□□ $lnt<\frac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ □ $t\in(0,1)$ □□□□□

□ $h(t)=lnt-\frac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ □

□ $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\frac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$ □

□ $\lambda^2 \geq 1$ □□□□ $t\in(0,1)$ □□ $h'(t)>0$ □

$\therefore h(t)$ □ $t\in(0,1)$ □□□□□□ h□1□$=0$□ $h(t)<0$ □ $t\in(0,1)$ □□□□□□□□□

□ $\lambda^2<1$ □□□□ $t\in(0,\lambda^2)$ □□ $h'(t)>0$ □ $t\in(\lambda^2$□$1)$ □ $h'(t)<0$ □

$\therefore h(t)$ □ $t\in(0,\lambda^2)$ □□□□□□ $t\in(\lambda^2$□$1)$ □□□□□□ h□1□$=0$□

$\therefore h(t)$ □ $t\in(0,1)$ □□□□□□ 0□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□ $e^{1+\lambda}<x_1x_2^{\lambda}$ □□□□□□ $\lambda^2\geq1$ □□ $\lambda>0$ □$\therefore \lambda\geq1$□

12□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=lnx+(x-a)^2$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□ $(1$□f□1□$)$ □□□□□□□□□ 1□□ a □□□

□2□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□3□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $f[x_1x_2(x_1+x_2)]>\dfrac{1-ln2}{2}$ □

□□□□□□1□□□ $f(x)=lnx+(x-a)^2$ □ $x\in(0,+\infty)$ □

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2(x-a)$ □

□ □□ $f(x)$ □□ $(1$ □ f □1□ $)$ □□□□□□□□1□

$\therefore f$ □1□ $=1+2(1-a)=1$ □

□□ $a=1$ □

□2□ $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2(x-a)=\dfrac{2x^2-2ax+1}{x}$ □

□ $u(x)=2x^2-2ax+1$ □

$a\leqslant 0$ □□△ $=4a^2-8\leqslant 0$ □

□□ $a\leqslant\sqrt{2}$ □

$\therefore a\leqslant\sqrt{2}$ □□ $f'(x)\geqslant 0$ □□□ $f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□

$a>\sqrt{2}$ □□△ $=4a^2-8>0$ □

□□ $2x^2-2ax+1=0$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □

□□□□□ $f(x)$ □ $(0,x_1)$ □ $(x_2$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ $(x_1$ □ $x_2)$ □□□□□□

□□□□□ $a\leqslant\sqrt{2}$ □□□□ $f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□

$a>\sqrt{2}$ □□□□ $2x^2-2ax+1=0$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □□□□□□ $f(x)$ □ $(0,x_1)$ □ $(x_2$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ $(x_1$ □ $x_2)$ □□□□□□

□3□□□2□□□□ $a>\sqrt{2}$ □□□□ $2x^2-2ax+1=0$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □

$x_1+x_2=a$ □ $x_1x_2=\frac{1}{2}$ □

□□□ $f[x_1x_2(x_1+x_2)]>\frac{1-\ln 2}{2}\Leftrightarrow f(\frac{a}{2})>\frac{1-\ln 2}{2}$ □

□□□ $\ln\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}>\frac{1-\ln 2}{2}$ □

□□□ g □a□ $=\ln\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}$ □ $(\sqrt{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□□

$\therefore \ln\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}>g(\sqrt{2})=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1-\ln 2}{2}$ □

□□□□□□□□ $f[x_1x_2(x_1+x_2)]>\frac{1-\ln 2}{2}$ □

13□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\ln^2 x-x+m\ln x$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □

□1□□□□ m □□□□□□

□2□□□□ $x_1x_2<4$ □

□□□□□□□1□ $f'(x)=\frac{2}{x}\ln x-1+\frac{m}{x}=\frac{2\ln x-x+m}{x}$ □

□ $g(x)=2\ln x-x+m$ □ $(x>0)$ □□ $g'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$ □

□ $g(x)$ □ $(0,2)$ □□□□ $(2,+\infty)$ □□□

□ $g(x)_{max}=g$ □2□ $=2\ln 2+m-2>0$ □□ $m>2-2\ln 2$ □

□ $g(0^+)\to-\infty$ □ $g(+\infty)\to-\infty$ □

□□□ m □□□□□□ $(2-2\ln 2,+\infty)$ □

□2□□□□□□ $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$ □□□□ $x_1>x_2$ □

□□ $\ln x_1-\ln x_2<\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ □

□□ $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=t$ □□□ $\ln t^2<t-\frac{1}{t}(t>1)$ □

□ $F(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}(t>1)$ □ $F'(t)=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}\leqslant 0$ □

□ $F(t)$ □□□□□□ $F(t)<F$ □1□ $=0$ □

□ $\ln t^2<t-\frac{1}{t}$ □□ $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$ □□□

□ $\begin{cases}2\ln x_1=x_1-m\\2\ln x_2=x_2-m\end{cases}$ □□□□□□ $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=2>\sqrt{x_1x_2}$ □

□ $x_1x_2<4$ □

14□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^2}-a(\ln x+\frac{2}{x})(a\in R)$ □□ $f(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □

□1□□□□ a □□□□□□

□2□□□□ $x_1x_2<1$ □

□□□□□□□1□ $f'(x)=\frac{(x-2)(e^{x-1}-ax)}{x^3}(x>0)$ □

□□□ $f(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □

□ $g(x)=e^{x-1}-ax$ □ $(0,2)$ □□□□□□□□□□

① $a\leqslant 1$ □□□□1□□□ $g(x)=e^{x-1}-ax\geqslant e^{x-1}-x$ □

□ $S(x)=e^{x-1}-x$ □

□□□ $(0,1)$ □□ $S'(x)<0$ □ $S(x)$ □□□□□

□ $(1,2)$ □□ $S'(x)>0$ □ $S(x)$ □□□□□

□□ $S(x)\geqslant S$ □1□ $=0$ □□ $g(x)\geqslant 0$ □

□□ $g(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□□□□□

② □ $a\geqslant e$ □□□□ $x\in(0,2)$ □ $e^{x-1}\in(\frac{1}{e}$ □ $e)$ □ $g'(x)=e^{x-1}-a<0$ □

□ $g(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□

□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□

③ □ $1<a<e$ □□ $g'(x)=e^{x-1}-a$ □

□ $0<x<lna+1$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $lna+1<x<2$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

□□ $g(x)_{min}=g(lna+1)=-alna$ □

□□ $\begin{cases} g(0)=\frac{1}{e}>0 \\ g(lna+1)=-alna<0 \\ g(2)=e-2a>0 \end{cases}$ □

□□ $1<a<\frac{e}{2}$ □

□□□□□ a □□□□□□ $(1,\frac{e}{2})$ □

□2□□□□□1□□□ $g(x_1)=g(x_2)=0$ □ $0<x_1=\ln a+1<x_2<2$ □

□□□□□ $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$ □□□ $0<x_1<x_2<2$ □

□□ $\ln x_1-\ln x_2>\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ □

□ $\ln\frac{x_1}{x_2}>\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ □

□ $t=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\in(0,1)$ □□□ $2\ln t>t-\frac{1}{t}(0<t<1)$ □

□□□□ $\varphi(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$ □

□ $\varphi'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$ □

□□□□□ $\varphi'(t)$ □□□ $(0,1)$ □□□□□□

□ $\varphi(t)>\varphi$ □1□ $=0$ □

□□□□□ $\begin{cases} e^{x_1-1}=ax_1 \\ e^{x_2-1}=ax_2 \end{cases}$ □

□□ $\begin{cases} x_1-1=\ln a+\ln x_1 \\ x_2-1=\ln a+\ln x_2 \end{cases}$ □

□□ $x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$ □

□ $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$ □

□□ $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$ □

□□ $x_1x_2<1$ □

15□□2021 □•□□□□□□□□□ $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x$ □ $m\in R$ □

□1□□ $g(x)=f'(x)$ □ ($f'(x)$ □ $f(x)$ □□□□□□□□□ $g(x)$ □□□ $[1$ □ $e]$ □□□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $x_1x_2>e^2$ □

□□□□□□1□□□ $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x$ □□□□□ R □ $g(x)=f'(x)=\ln x-mx$ □ $g'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$ □

①□ $m\leqslant\frac{1}{e}$ □□□□ $g'(x)\geqslant 0$ □ $(1,e)$ □□□□□□□ $g(x)$ □ $(1,e)$ □□□□□□

□□ $g(x)$ □□□ $[1$ □ $e]$ □□□□□□ $g(x)_{max}=g$ □e□ $=1$ □

②□ $\frac{1}{e}<m<1$ □□□ $f'(x)=0$ □□□ $x=\frac{1}{m}\in(1,e)$ □

□ $1<x<\frac{1}{m}$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $\frac{1}{m}<x<e$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□□ $g(x)$ □□□ $[1$ □ $e]$ □□□□□□ $g(x)_{max}=g(\frac{1}{m})=-\ln m-1$ □

③□ $m\geqslant 1$ □□□□ $g'(x)\leqslant 0$ □ $(1,e)$ □□□□□□□ $g(x)$ □ $(1,e)$ □□□□□□

□□ $g(x)$ □□□ $[1$ □ $e]$ □□□□□□ $g(x)_{max}=g$ □1□ $=-m$ □

□□□□□□ $m\leqslant\frac{1}{e}$ □□□□□□1□□ $\frac{1}{e}<m<1$ □□□□□□ $-\ln m-1$ □□ $m\geqslant 1$ □□□□□□ $-m$ □

□2□□□□ $f'(x)=\ln x+1-mx-1=\ln x-mx$ □□□□□□ $f'(x)=0$ □□□□□□□□□□ $m>0$ □

□$lnx_1=mx_1$□$lnx_2=mx_2$□□□$lnx_1x_2=m(x_1+x_2)$□$lnx_1-lnx_2=m(x_1-x_2)$□

□□$lnx_1x_2=\frac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}(x_1+x_2)=ln\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{1+\frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}-1}$□

□□□$x_2>x_1$□□$t=\frac{x_2}{x_1}>1$□□$lnx_1x_2=lnt\cdot\frac{t+1}{t-1},t>1$□□□□□$lnx_1x_2>2$□

□$h(t)=lnt-\frac{2(t-1)}{t+1},t>1$□□$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$□

□□$h(t)$□$(1,+\infty)$□□□□□$h(t)>h$□1□$=0$□□$lnt\cdot\frac{t+1}{t-1}>2$□

□□□$lnx_1x_2>2$□□$x_1x_2>e^2$□

16□□2021•□□□□□□□□□$f(x)=e^x-ax^2-x$□

□1□□$a=1$□□□□□$y=f(x)$□□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□

□2□□□□$F(x)=f(x)+x$□□□□□x_1□x_2□□□□$x_1x_2<(ln(2a))^2$□

□□□□□□1□□$a=1$□□$f(x)=e^x-x^2-x$□□$f'(x)=e^x-2x-1$□

□□$k=f'$□1□$=e-3$□□f□1□$=e-2$□

□□□□□□□$y=(e-3)(x-1)+e-2$□□$y=(e-3)x+1$□

□2□□□□□□□$F(x)=e^x-ax^2$□□$F'(x)=e^x-2ax$□

□□□□$F(x)$□□□□□□x_1□x_2□

□□$F'(x)=0$□□□□□□□□□□x_1□x_2□

□$h(x)=e^x-2ax$□□$h'(x)=e^x-2a$□

① □ $a\leqslant 0$ □□ $h'(x)>0$ □□□□□□□ $h(x)$ □ R □□□□□□

□ $h(x)$ □ R □□□□□□□□□□□□□□□

② □ $a>0$ □□□ $h'(x)=0$ □□ $x=ln(2a)$ □

□ $x\in(-\infty$ □ $ln(2a))$ □□ $h'(x)<0$ □□□□ $h(x)$ □ $(-\infty$ □ $ln(2a))$ □□□□□□

□ $x\in(ln(2a)$ □ $+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □□□□ $h(x)$ □ $(ln(2a)$ □ $+\infty)$ □□□□□□

□□□□ $h(x)=0$ □□□□□□□□□□ x_1 □ x_2 □

□□ $h(x)_{min}=h(ln(2a))=2a-2aln(2a)<0$ □□ $a>\frac{e}{2}$ □

□□□ $x_1<x_2$ □□ $x_1<ln(2a)$ □ $x_2>ln(2a)>1$ □

□ $h(0)=1>0$ □□□ $x_1\in(0$ □ $ln(2a))$ □

□ $G(x)=h(x)-h(2ln(2a)-x)=e^{x}-4ax-\frac{4a^{2}}{e^{x}}+4aln(2a)$ □

□ $G'(x)=e^{x}+\frac{4a^{2}}{e^{x}}-4a.2\sqrt{e^{x}}\times\frac{4a^{2}}{e^{x}}-4a=0$ □

□□□□ $G(x)$ □ R □□□□□□

□ $x_2>ln(2a)$ □□□ $G(x_2)>G(ln(2a))=0$ □□ $h(x_2)>h(2ln(2a)-x_2)$ □

□ x_1 □ x_2 □□□ $h(x)$ □□□□□□□ $h(x_1)=h(x_2)$ □

□□ $h(x_1)>h(2ln(2a)-x_2)$ □

□□ $x_2>ln(2a)$ □□□ $2ln(2a)-x_2<ln(2a)$ □

□ $x_1<ln(2a)$ □□□ $h(x)$ □ $(-\infty$ □ $ln(2a))$ □□□□□□

□□ $x_1 < 2ln(2a) - x_2$ □□ $x_1 + x_2 < 2ln(2a)$ □

□ $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1x_2}$ □□□ $2\sqrt{x_1x_2} < 2ln(2a)$ □□□ $x_1x_2 < (ln(2a))^2$ □

17□□2021•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=2xlnx-ax^2-2x+a^2(a>0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□I□□ a □□□□□

□II□□ $f(x)$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $\sqrt{x_1 \cdot x_2} > e$ □

□□□□□□I□□□□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

$f(x)=2xlnx-ax^2-2x+a^2(a>0)$ □

□ $f'(x)=2lnx+2-2ax-2$ □□ $f'(x)=0$ □□ $lnx-ax=0$ □

□□□□□□□ $lnx-ax=0$ □ $(0,+\infty)$ □□2□□□□

□ $g(x)=lnx-ax$ □□□□□□□□ $g(x)$ □2□□□□□□□

□ $g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$ □

□ $a>0$ □□ $0<x<\frac{1}{a}$ □□ $g'(x)>0$ □□ $x>\frac{1}{a}$ □□ $g'(x)<0$ □

□ $g(x)$ □ $(0,\frac{1}{a})$ □□□□□□ $(\frac{1}{a}$ □ $+\infty)$ □□□□□

□ $g(x)$□□□ $=g\left(\frac{1}{a}\right)=ln\frac{1}{a}-1$ □

□ □ $x\to 0$ □□ $g(x)\to -\infty$ □□ $x\to +\infty$ □□ $g(x)\to -\infty$ □

□□□□ $g(x)$□□□ >0 □□ $ln\frac{1}{a}-1>0$ □□ $0<a<\frac{1}{e}$ □

□ a □□□□□□ $(0,\frac{1}{e})$ □

□II□□□□□I□□□ x_1 □ x_2 □□□□□ $lnx-ax=0$ □□□□□

即 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$，

设 $x_1>x_2$，作差得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$，即 $a=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

原不等式 $\sqrt{x_1\cdot x_2}>e$ 等价于 $x_1\cdot x_2>e^2$，

$$\ln x_1+\ln x_2>2\Leftrightarrow a(x_1+x_2)>2\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $t>1$，$\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，

设 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $g'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore$ 函数 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(t)>g$（1）$=0$，即不等式 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，

故所证不等式成立．